ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА ТА ЕРГОНОМІКА

УДК 625.113:514.18
DOI https://doi.org/10.32838/2663-5941/2022.1/01

Борисенко В.Д.
Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

Устенко С.А.
Національний університет «Одеська політехніка»

Устенко І.В.
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

Кузьма К.Т.
Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

МОДЕЛЮВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ДІЛЯНОК ЗАЛІЗНИЧНИХ КОЛІЙ S-ПОДІБНОЇ ФОРМИ

Стаття присвячена розробці методу геометричного моделювання S-подібних криволінійних ділянок залізничних колій, застосування яких зумовлюється наявністю населених пунктів, геологічних, топографічних та інших перешкод. Рух потягів на криволінійних ділянках шляху відрізняється певними особливостями, передусім пов'язаними із силовою взаємодією колісних пар рухомого складу з рейками шляху. У зв'язку з цим фахівці залізничної справи приділяють особливу увагу улаштуванню криволінійних ділянок шляху. У роботі пропонується описувати криволінійну ділянку кривою, яка визначається в натуральній параметризації із застосуванням закону розподілу кривини у вигляді полінома сьомого степеня та крайовими умовами, що забезпечують рівність нулю кривини, її першої та другої похідних від довжини власної дуги в початковій і кінцевій точках модельованої ділянки. Для однозначного визначення необхідної параметричної кривої треба мати значення восьми коефіцієнтів поліному та довжину дуги. Крайові умови зменшують кількість невідомих коефіцієнтів до п'яти й дають можливість сформувати три алгебраїчні рівняння, до яких додається залежність кута нахилу дотичної до модельованої кривої. Послідовне розв'язання цих рівнянь відносно п'ятого коефіцієнта й довжини дуги визначає вирази для чотирьох коефіцієнтів. Останній коефіцієнт і довжина дуги знаходяться із застосуванням двох відомих із диференціальної геометрії інтегральних рівнянь, які пов'язують ортогональні координати кривої з кутом нахилу дотичної. Коефіцієнт і довжина дуги визначаються шляхом розв'язання оптимізаційної задачі, пов'язаної з доведенням проміжно отриманої кінцевої точки кривої до заданої кінцевої точки.

Запропонований метод геометричного моделювання криволінійних ділянок залізничного шляху реалізовано у вигляді комп'ютерного коду, який дає змогу, окрім числових результатів, отримувати графічні зображення результатів моделювання на екрані монітора комп'ютера.

Ключові слова: *залізнична колія, криволінійна ділянка, геометричне моделювання, кривина, чисельний метод, комп'ютерна реалізація.*

Постановка проблеми. У багатьох країнах світу залізничний транспорт є невід'ємною частиною матеріального виробництва. Він забезпечує пасажирські, вантажні та змішані вантажно-пасажирські перевезення. Безпека руху залізничного транспорту є одним із найважливіших питань його експлуатації.

З геометричної точки зору залізнична колія не становить ніякого інтересу, оскільки має вигляд прямолінійних рейок нескінченної довжини. У сприятливих природно-географічних умовах траса залізничного шляху складається з прямолінійних рейок довжиною в десятки кілометрів. Але в дійсності колія, окрім прямолінійних, має ще й криволінійні ділянки.

Криволінійні ділянки залізниці застосовуються в тому випадку, коли необхідно обійти населені пункти, топографічні або геологічні перешкоди з метою зменшення будівельних витрат і забезпечення стійкості земельного полотна й інших залізничних споруд.

Улаштування рейкової колії на кривих ділянках має низку особливостей, зумовлених специфікою взаємодії колії й рухомого складу, змінами конфігурації колії на криволінійних ділянках, необхідністю забезпечення плавної зміни кривини в місцях з'єднання ділянок колії з різними сталими кривинами рейок.

Проектантами залізничної колії особлива увага приділяється улаштуванню криволінійних ділянок при високих швидкостях руху потягів, застосуванню колійних кривих малого радіуса при русі рухомого складу великої ваги та значної бази між колесами. У сучасних умовах, коли швидкість пасажирських потягів сягає 300 км/год. і вище, вимоги до якості криволінійних ділянок суттєво зростають, особливо коли за різних обставин рухомому складу доводиться кілька разів змінювати напрям руху. Подібні ділянки прийнято називати *S*-подібними.

Криволінійні ділянки залізничного шляху мають забезпечувати плавність зміни кривини в місцях з'єднання рейок колії з різними кривинами, рівність кутів нахилу дотичних і рівність нулю першої та другої похідних від кривини в початковій і кінцевій точках криволінійної ділянки.

Отже, усе викладене вище зумовлює актуальність проведення досліджень у напрямі розробки нових методів геометричного моделювання криволінійних ділянок залізничного шляху. Більше того, розв'язання задачі геометричного моделювання криволінійних ділянок залізничних колій є важливим науково-технічним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання вдосконалення криволінійних ділянок шляху турбує фахівців залізничної справи, мабуть, із перших років існування залізниці. Одним із перших рівнянь, які застосовувалися при описі перехідних кривих, була кубічна парабола, що пояснювалося простотою математичного виразу. Надалі для моделювання криволінійних ділянок залізничного шляху почали застосовувати спіралі, клотоїди (спіралі Корню), бісинусоїди, синусоїдальні спіралі, радіоїди, лемніскати Бернуллі та інші криві.

Так, у роботі [1] запропоновано варіант криволінійної ділянки шляху, який базується на застосуванні властивостей клотоїди та кубічної параболи. Зазначимо, що клотоїда є однією з кривих, яка широко використовується при описі криволінійних ділянок залізничного шляху. Водночас у праці [2] відмічається недолік клотоїди, зумовлений лінійним законом розподілу кривини, і пропонується, замість клотоїди, застосовувати синусоїдальну криву.

Автори роботи [3] для опису криволінійних ділянок шляху передбачають застосовувати кубічні параболи, хоча практика свідчить, що ці криві краще використовувати на коротких ділянках шляху.

У праці [4] пропонуються криволінійні ділянки залізничного шляху, які описуються поліномами 9-го й 11-го степенів. Такої ж думки дотримується автор роботи [5]. Як показано в праці [6], поліноміальні криві можна застосовувати для моделювання *S*-подібних перехідних кривих.

Доволі популярними при описі криволінійних ділянок шляху є різноманітні спіралі [7; 8]. При цьому відмічається, що спіральним кривим не притаманні математичні особливості й екстремуми кривини, їх доцільно застосовувати для згладжування шляхів у місцях різкої зміни кривини.

У роботі [9] пропонується моделювання криволінійних ділянок шляху із застосуванням кривих із нелінійним законом розподілу кривини. Для моделювання таких же ділянок у праці [10] застосовані згладжувальні сплайни, які мають певні переваги з точки зору гладкості в кінцевих точках криволінійних ділянок шляху перед клотоїдними кривими.

Раціональні криві Безьє другого порядку дали змогу за допомогою тільки однієї такої кривої побудувати перехідну криву з прийнятними характеристиками [11]. Приклад застосування синусоїдних гіперболічних функцій до побудови перехідних кривих наведено в роботі [12].

Біклотоїдне моделювання криволінійних ділянок шляху пропонується в праці [13]. Деякі питання геометричного моделювання криволінійних ділянок залізничного шляху розглянуті в монографії [14]. Зокрема, у ній пропонується моделювання *S*-подібних ділянок залізничного шляху із застосуванням кривої, що подається в натуральній параметризації із законом розподілу кривини $k(s)$ у вигляді полінома п'ятого степеня та наступними крайовими умовами:

$$k\big|_{\substack{s=0\\s=S}} = 0; \qquad \frac{dk}{ds}\bigg|_{\substack{s=0\\s=S}} = 0,$$

де S – довжина кривої від початкової до кінцевої точки.

Формулювання цілей статті. Метою роботи є розробка методу геометричного моделювання *S*-подібних криволінійних ділянок залізничного шляху із застосуванням кривих, які подаються в натуральній параметризації із законом розподілу кривини вздовж власної дуги у вигляді полінома сьомого степеня та нульовими значеннями кривини, її першої і другої похідних у початковій і кінцевій точках криволінійної ділянки шляху.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо геометричне моделювання S-подібної криволінійної ділянки залізничного шляху, яка влаштовується між прямими рейками, орієнтованими під деяким кутом.

Моделювання криволінійної ділянки будемо виконувати із застосуванням кривої, яка подається в натуральній параметризації та передбачає наявність певної залежності кривини кривої від довжини її власної дуги.

Нехай s – довжина шляху, яка обчислюється від початку криволінійної ділянки до поточної точки, а $k(s)$ – кривина кривої. Крайові умови для криволінійної ділянки мають вигляд:

$$k\Big|_{\substack{s=0\\ s=S}} = 0; \quad \frac{dk}{ds}\Big|_{\substack{s=0\\ s=S}} = 0; \quad \frac{d^2k}{ds^2}\Big|_{\substack{s=0\\ s=S}} = 0,$$

де S – довжина кривої від початкової до кінцевої точки.

За заданих крайових умов кривина кривої має описуватися поліномом сьомого степеня:

$$k = as^7 + bs^6 + cs^5 + ds^4 + es^3 + fs^2 + gs + h.$$

Перша та друга похідні кривини по довжині дуги визначаються за виразами:

$$k' = 7as^6 + 6bs^5 + 5cs^4 + 4ds^3 + 3es^2 + 2fs + g;$$

$$k'' = 42as^5 + 30bs^4 + 20cs^3 + 12ds^2 + 6es + 2f.$$

Зважаючи на крайові умови, можна дійти висновку, що коефіцієнти h, g і f дорівнюють нулю.

Тоді записані вище вирази по кривині та її похідних матимуть вигляд:

$$k = as^7 + bs^6 + cs^5 + ds^4 + es^3;$$

$$k' = 7as^6 + 6bs^5 + 5cs^4 + 4ds^3 + 3es^2;$$

$$k'' = 42as^5 + 30bs^4 + 20cs^3 + 12ds^2 + 6es.$$

При $s = S$ ці вирази мають дорівнювати нулю, а саме:

$$aS^7 + bS^6 + cS^5 + dS^4 + eS^3 = 0;$$

$$7aS^6 + 6bS^5 + 5cS^4 + 4dS^3 + 3eS^2 = 0;$$

$$42aS^5 + 30bS^4 + 20cS^3 + 12dS^2 + 6eS = 0.$$

До цих рівнянь додаємо залежність кута нахилу дотичної до модельованої кривої:

$$\phi(s) = \phi_0 + \frac{as^8}{8} + \frac{bs^7}{7} + \frac{cs^6}{6} + \frac{ds^5}{5} + \frac{es^4}{4},$$

де φ_0 – кут нахилу дотичної в початковій точці кривої.

При $s = S$ будемо мати:

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{aS^8}{8} + \frac{bS^7}{7} + \frac{cS^6}{6} + \frac{dS^5}{5} + \frac{eS^4}{4},$$

де φ_1 – кут нахилу дотичної в кінцевій точці кривої.

Послідовним розв’язанням цих чотирьох рівнянь знаходимо залежності для розрахунку чотирьох коефіцієнтів:

$$d = 5\left(7\Phi S^3 - \frac{e}{S}\right);$$

$$c = -\frac{3}{S}\left(35\Phi S^3 - 3\frac{e}{S}\right);$$

$$b = \frac{7}{S^2}\left(15\Phi S^3 - \frac{e}{S}\right);$$

$$a = -\frac{1}{S^3}\left(35\Phi S^3 - 2\frac{e}{S}\right),$$

де $\Phi = \dfrac{8(\phi_1 - \phi_0)}{S^8}$.

Коефіцієнт e й довжина дуги S визначаються шляхом розв’язання оптимізаційної задачі, пов’язаної з узгодженням проміжно отриманої кінцевої точки кривої із заданою її кінцевою точкою.

За цільову функцію в оптимізаційній задачі приймається вираз:

$$\delta = \sqrt{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{y} - y_1)^2},$$

де $\bar{x}$, $\bar{y}$ – координати проміжної точки, визначеної з деякими значеннями невідомих параметрів, а x_1, y_1 – координати заданої кінцевої точки модельованої кривої.

Безпосередньо для розв’язання оптимізаційної задачі застосовується високоефективний алгоритм, запропонований у роботі [15].

Координати кривої, яка подається в натуральній параметризації, визначаються за такими виразами:

$$x_1 = x_0 + \int_0^S \cos\phi(s)\,ds;$$

$$y_1 = y_0 + \int_0^S \sin\phi(s)\,ds.$$

Оскільки координати кінцевої точки перехідної кривої відомі, то цих двох рівнянь достатньо для визначення двох невідомих, необхідних для моделювання потрібної кривої.

На рис. 1 наведені тестові приклади трьох S-подібних криволінійних ділянок, побудованих у прямокутнику з одиничною шириною та вдвічі більшою висотою. Усі криві починаються в точці з нульовими координатами. Наприкінці вони мають абсцису, рівну одиниці, а ордината кінцевих точок збільшується з кроком 0,2. Відрізки прямих ліній у початковій і кінцевих точках обумовлюють кути нахилу дотичних до осі x, які відповідають вихідним даним моделювання криволінійних ділянок шляху. Зазначимо, що в цих розрахунках кут φ_0 збільшувався від 55° до 75° з кроком 10°, із таким же кроком кут φ_1 зменшувався від 30° до 10°.

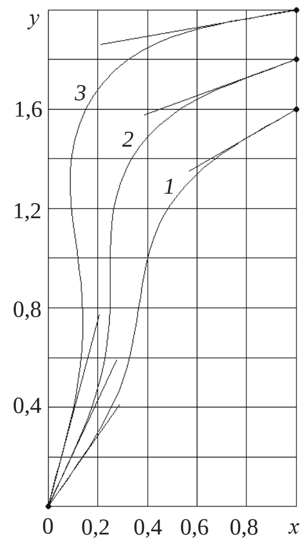

Рис. 1. Тестові *S*-подібні криві

Графіки розподілу кривини від відносної довжини дуги для розглянутих вище кривих наведені на рис. 2.

З розгляду графіків розподілу кривини видно, що на кінцях криволінійних ділянок кривина дорівнює нулю.

На рис. 3 і 4 показані графіки розподілу першої та другої похідних від довжини власної дуги. Похідні на кінцях криволінійних ділянок мають нульові значення, що повністю узгоджується з крайовими умовами.

Нумерація кривих на цих рисунках аналогічна нумерації кривих, показаних на рис. 1.

Висновки. Проведені в широкому діапазоні варіювання параметрів розрахункові дослідження підтвердили працездатність запропонованого методу геометричного моделювання *S*-подібних криволінійних ділянок залізничних шляхів, які

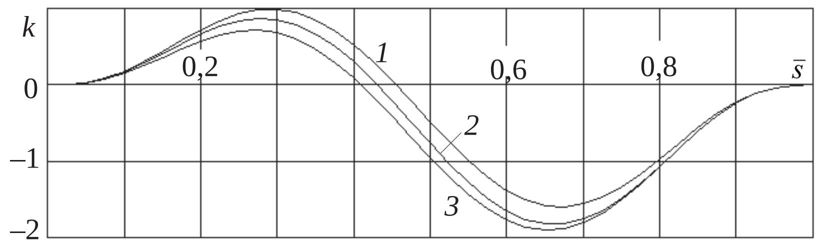

Рис. 2. Графіки розподілу кривини тестових кривих

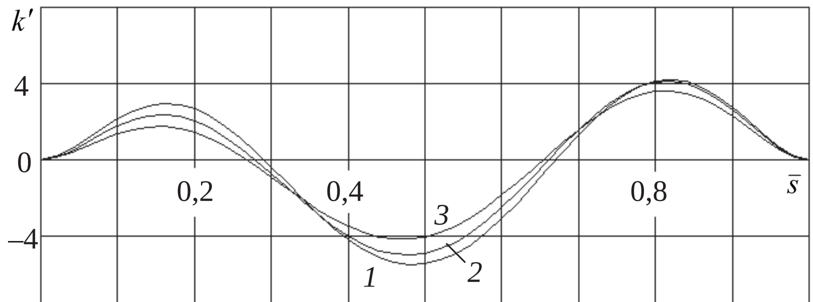

Рис. 3. Графіки розподілу першої похідної кривини

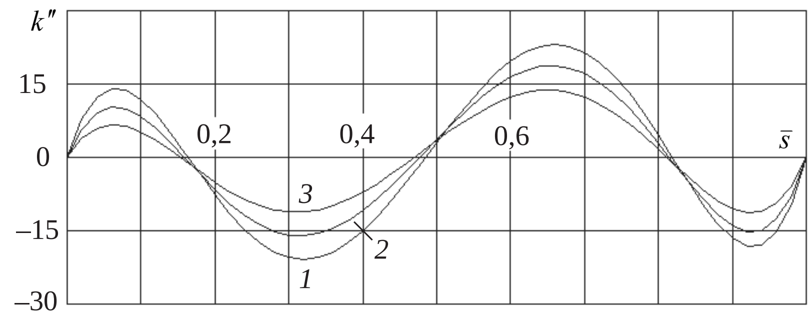

Рис. 4. Графіки розподілу другої похідної кривини

влаштовуються між прямолінійними рейками при обходженні різноманітних перешкод.

Криволінійні ділянки подаються в натуральній параметризації із законом розподілу кривини вздовж власної дуги у вигляді полінома сьомого степеня та забезпеченням нульових значень кривини, її першої та другої похідних у початковій і кінцевій точках модельованої ділянки шляху.

Список літератури:

1. Eliou N., Kaliabetsos G. A new, simple and accurate transition curve type, for use in road and railway alignment design. *European Transport Research Review.* 2014. № 6. P. 171–179.
2. Pirti A., Yucel M.A., Ocalan T. Transrapid and the transition curve as sinusoid. *Tehnički Vjesnik.* 2016. № 23. P. 315–320.
3. Shen T.-I., Chang C.H., Chang, K.Y. Lu, C.C. A numerical study of cubic parabolas on railway transition curves. *Journal of Marine Science and Engineering.* 2013. № 21. P. 191–197.
4. Zboinski K., Woznica P. Optimum Railway Transition Curves – Method of the Assessment and Results. *Energies.* 2021. № 14. P. 1–15.
5. Kobryn A. Polynomial Solutions of Transition Curves. *Journal of Surveying Engineering.* 2011. № 137. P. 71–80.
6. Kobryn A., Stachera, P. S-Shaped Transition Curves as an Element of Reverse Curves in Road Design. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering.* 2019. № 14. P. 484–503.
7. Tari E., Bayka O.L. A new transition curve with enhanced properties. *Canadian Journal of Civil Engineering.* 2005. № 32. P. 913–923.
8. Levent A., Sahin B., Habib Z. Spiral transitions. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities.* 2018. Vol. 33. P. 468–490.
9. Koc W. Smoothed transition curve for railways. *Transportation Overview – Przegląd Komunikacyjny.* 2019. № 7. P. 19–31.
10. Brustad T.F., Dalmo R. Exploring Benefits of Using Blending Splines as Transition Curves. *Applied sciences.* 2020. № 10. 18 p.
11. Ahmad A., Ahmat N., Adnan M. Fair Transition Spiral Using a Single Rational Quadratic Bezier Curve. *Journal of Computer Science & Computational Mathematics.* 2020. Volume 10. Issue 1. P. 7–12.
12. Kisgyörgy L., Barna Z. Hyperbolic transition curve. *Periodica polytechnica, Civil Engineering.* 2014. № 58/1. P. 63–69.
13. Аккерман Г.Л., Аккерман С.Г., Кравченко О.А. Биклотоидное проектирование криволинейных участков железной дороги. *Путь и путевое хозяйство.* 2010. № 10. С. 28–30.
14. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Устенко І.В. Геометричне моделювання кривих ліній і поверхонь у натуральній параметризації. Миколаїв : МНУ, 2018. 220 с.
15. Hooke R., Jeeves T.A. Direct search solution of numerical and statistical problems. *Journal of the ACM.* 1961. Vol. 8. № 2. P. 212–229.

Borisenko V.D., Ustenko S.A., Ustenko I.V., Kuzma K.T. GEOMETRIC MODELING OF CURVILINEAR SECTIONS S-SHAPED RAILWAYS

The article is devoted to the development of a method of geometric modeling of S-shaped curvilinear sections of railway tracks, the construction of which is conditioned by the presence of settlements, geological, topographic and other obstacles. The movement of trains on curvilinear sections of the track differs in certain features and, first of all, related to the force interaction of wheel pairs of rolling stock with the rails of the track. Therefore, railway specialists pay special attention to the arrangement of curvilinear sections of the track. In this paper, we propose to describe the curvilinear section of the curve, which is determined in natural parameterization using the law of curvature distribution in the form of a polynomial of the seventh degree and boundary conditions that ensure zero curvature, its first and second derivatives. To unambiguously determine the required parametric curve, it is necessary to have the value of eight coefficients of the polynomial and the length of the arc. Boundary conditions reduce the number of unknown coefficients to five and make it possible to form three algebraic equations, to which is added the dependence of the angle of inclination tangent to the modeled curve. The sequential solution of these equations with respect to the fifth coefficient and the length of the arc determine the expressions for the four coefficients. The last coefficient and the length of the arc are found using two integral equations known from differential geometry, which connect the orthogonal coordinates of the curve with the angle of inclination of the tangent. The coefficient and the length of the arc are determined by solving the optimization problem associated with bringing the intermediate end point of the curve to a given end point.

The proposed method of geometric modeling of curvilinear sections of the railway is implemented in the form of computer code, which allows, in addition to numerical results, to obtain graphical images of the simulation results on a computer monitor screen.

Key words: *railway track, curvilinear section, geometric modeling, curvature, numerical method, computer implementation.*